2/ Soit M un point de [AB] distinct de A et de B. Posons M_1=R(M)

•M_1 = R(M) et R(A) = I $\Rightarrow$ AM = IM_1

et comme AM = IM′ alors IM_1 = IM′ (5)

•M ∈ [AB] $\Rightarrow$ R(M) = M_1 ∈ [IC] (6)

(5); (6) et M′ ∈ [IC] $\Rightarrow$ M_1 = M′

Ainsi M′ = R(M) $\Leftrightarrow$ ΩM = ΩM′ et $\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right)} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Leftrightarrow$ le triangle ΩMM′ est équilatéral direct.

3/a- •G le centre de gravité du triangle équilatéral direct ΩMM′

$\Rightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega G}\right)} \equiv \frac{\pi}{6}$ [2π] est l'angle de S.

•S(M) = G $\Rightarrow$ k = $\frac{\Omega G}{\Omega M}$ est le rapport de S.

Soit I = M ∗ M′.

G le centre de gravité de ΩMM′ $\Rightarrow$ ΩG = $\frac{2}{3}$ΩI.

Ainsi k = $\frac{2}{3}\frac{\Omega I}{\Omega M} = \frac{2}{3}\cos\frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Conclusion : S est de centre Ω; de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

b- R(B) = C $\Leftrightarrow$ ΩB = ΩC et $\widehat{\left(\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega C}\right)} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Leftrightarrow$ le triangle ΩBC est équilateral direct.

• R(B) = C et R(A) = I $\Rightarrow$ AB = IC

et on a AB = BI car ABI équilatéral

D'où BI = IC $\Rightarrow$ I ∈ méd[BC].

• BI = IΩ car Ω = $S_{(AI)}$(B) $\Leftrightarrow$ (AI) = méd[BΩ]

$\Rightarrow$ I ∈ méd[BΩ]

I ∈ méd[BΩ]
I ∈ méd[BC]
ΩBC est équilateral
} $\Rightarrow$ I est le centre de gravité de ΩBC

et comme de plus R(B) = C alors S(B) = I

⊕ Pour la construction de A′ = S(A) on a R(A) = I donc A est le centre de gravité du triangle de ΩAI.

c- M, A et B sont alignés car M ∈ [AB].

$\Rightarrow$ S(M) = G ;S(A) = A′ et S(B) = I sont alignés car toute similitude conserve l'alignement.

EXERCICE 2